Проблемы физики, математики и техники, № 1 (42), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЭКСПОНЕНТ

Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE CONVERGENCE RATE OF HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS OF THE THREE EXPONENT SYSTEM

E.P. Kechko

F. Scorina Gomel State University

Для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{3}$ найдена скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода. Доказанные теоремы дополняют результаты, полученные ранее О. Перроном, Д. Браессом, А.И. Аптекаревым, А.П. Старовойтовым и др.

***Ключевые слова**: аппроксимации Эрмита – Паде 2-го рода, система экспоненциальных функций, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.*

The convergence rate of type II Hermite – Padé approximants for the system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{3}$ is found. The theorems proved in the paper complement the results obtained earlier by O. Perron, D. Braess, A.I. Aptekarev, A.P. Starovoitov and other authors.

***Keywords**: type* II *Hermite – Padé approximations*, *system of exponential functions*, *asymptotic equalities*, *Hermite integrals.*

Введение

Рассмотрим систему экспоненциальных функций
$$\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k},$$
где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – различные отличные от нуля комплексные числа. Для индекса $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z) \not\equiv 0$, $P^j_{n,\vec{m}}(z)$:
$$\deg Q_{n,\vec{m}} \le |m|, \ \deg P^j_{n,\vec{m}} \le n_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, k,$$
удовлетворяющие условиям
$$R^j_{n,\vec{m}}(z) = R^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = = Q_{n,\vec{m}}(z) e^{\lambda_j z} - P^j_{n,\vec{m}}(z) = O(z^{n+|m|+1}), \ z \to 0, \tag{0.1}$$
где $|m| = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $\ n_j = n + |m| - m_j$, $\ j = 1, 2, \ldots, k.$
При $k = 1$ считаем, что $\lambda_1 = 1$.

Многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P^1_{n,\vec{m}}(z)$, …, $P^k_{n,\vec{m}}(z)$ принято называть *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а рациональные функции
$$\pi^j_{n,\vec{m}}(z) = \pi^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = \frac{P^j_{n,\vec{m}}(z)}{Q_{n,\vec{m}}(z)}, \ j = 1, 2, \ldots, k$$
– *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (*совместными аппроксимациями Паде*) системы экспонент. Диагональному случаю соответствует набор индексов, для которого $n = m_1 = \ldots = m_k$.

Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$ были введены Ш. Эрмитом в работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа *e*. Им также были найдены явные выражения (подробнее см. [2]) для многочленов и остаточной функции, удовлетворяющие условиям (0.1): если $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$, то
$$Q_{n,\vec{m}}(z) = \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$
$$P^j_{n,\vec{m}}(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_{\lambda_j}^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$
$$R^j_{n,\vec{m}}(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{\lambda_j} \left[x^n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$
$$j = 1, 2, \ldots, k.$$

При $k = 1$ $\ \vec{m} = m_1 = m$, а $\pi_{n,m}(z) := \pi^1_{n,\vec{m}}(z)$ называется *аппроксимацией Паде*. Ее свойства достаточно хорошо изучены [3]. Так, Паде доказал, что при $n/m \to \gamma$, $\ 0 \le \gamma \le +\infty$ дроби $\pi_{n,m}(z)$ равномерно сходятся к e^z на компактах из $\mathbb{C}$. О. Перрон [4] получил аналогичный результат при $n + m \to \infty$. Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z)$, которая была решена Д. Браессом [5]: *для любого комплексного z при $n + m \to \infty$*
$$e^z - \pi_{n,m}(z) = = (-1)^m \frac{m!\,n!\,e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\,(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \tag{0.2}$$

Для $k > 1$ Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$, где λ_j – различные отличные от нуля комплексные числа. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [6], который доказал, что: *дроби* $\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z;e^{\lambda_j\xi})$ *сходятся к* $e^{\lambda_j z}$ *равномерно на компактах в* $\mathbb{C}$ *и для любого* $z\in\mathbb{C}$ *при* $n+|m|\to+\infty$

$$Q_{n,\vec{m}}(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j m_j}{n+|m|}z\right\}(1+o(1)). \qquad (0.3)$$

Отметим, что в настоящее время скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде в основном исследовалась лишь при действительных $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ [7]–[10] и в диагональном случае.

В работе [9] описана асимптотика при $k=2$. Недиагональные аппроксимации Эрмита – Паде для системы $\{e^{jz}\}_{j=1}^{3}$ рассмотрены в [10].

В данной работе исследована скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{3}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{3}$ – различные отличные от нуля комплексные числа. Сформулированные результаты справедливы в том числе и для недиагонального случая. При доказательстве теоремы использовался новый подход [9], который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения асимптотических методов перевала и Лапласа.

1 Теорема о скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде

***Теорема* 1.1.** *Пусть* n,m_1,m_2,m_3 *– произвольные целые неотрицательные числа, а рациональные дроби* $\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z)$, $j=1,2,3$ *– аппроксимации Эрмита – Паде для системы* $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{3}$, *где* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{3}$ *– различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty}|m|/\sqrt{n}=0$, *то для любого комплексного числа* z *равномерно по всем* $\vec{m}$, *для которых* $0\le|m|\le m(n)$, *при* $n\to+\infty$

$$e^{\lambda_1 z}-\pi_{n,\vec{m}}^{1}(z)=$$
$$=(-1)^{|m|}\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3}\times \qquad (1.1)$$
$$\times\frac{m_1!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!}(1+o(1)),$$

$$e^{\lambda_2 z}-\pi_{n,\vec{m}}^{2}(z)=$$
$$=(-1)^{|m|}\lambda_2^{n+m_2+1}(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}(\lambda_3-\lambda_2)^{m_3}\times \qquad (1.2)$$
$$\times\frac{m_2!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!}(1+o(1)),$$

$$e^{\lambda_3 z}-\pi_{n,\vec{m}}^{3}(z)=$$
$$=(-1)^{|m|}\lambda_3^{n+m_3+1}(\lambda_1-\lambda_3)^{m_1}(\lambda_2-\lambda_3)^{m_2}\times \qquad (1.3)$$
$$\times\frac{m_3!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!}(1+o(1)),$$

где оценка $o(1)$ *равномерна по всем* $|z|\le L$. *Здесь и далее* L,L_1 *– абсолютные постоянные.*

Доказательство. Рассмотрим

$$R_{n,\vec{m}}^{1}(z)=\frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\times$$
$$\times\int_0^{\lambda_1}x^n(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}(x-\lambda_3)^{m_3}e^{(\lambda_1-x)z}dx.$$

В интеграле

$$I_1(z)=\int_0^{\lambda_1}x^n(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}(x-\lambda_3)^{m_3}e^{(\lambda_1-x)z}dx$$

сделаем замену $x=\lambda_1 t.$ В результате получим

$$I_1(z)=$$
$$=\lambda_1^{n+m_1+1}\int_0^1 t^n(t-1)^{m_1}(\lambda_1 t-\lambda_2)^{m_2}(\lambda_1 t-\lambda_3)^{m_3}e^{\lambda_1(1-t)z}dt.$$

В новом интеграле сделаем следующую замену $u=1-t.$ Тогда

$$I_1(z)=(-1)^{|m|}\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3}\times$$
$$\times\int_0^1(1-u)^n u^{m_1}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_3-\lambda_1}\right)^{m_3}e^{\lambda_1 uz}du.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1^p(z)=$$
$$=\int_0^1(1-u)^n u^{m_1+p}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_3-\lambda_1}\right)^{m_3}du.$$

Используя формулу бинома Ньютона и равенство

$$\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\right)\left(\sum_{t=0}^{m}C_m^t x^t\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{t=0}^{k}C_n^t C_m^{k-t}\right)x^k,$$

а затем свойства бета-функции Эйлера $B(u;v)$, легко показать, что

$$J_1^p(z)=\sum_{k=0}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{C_{m_2}^{j}C_{m_3}^{k-j}\lambda_1^k}{(\lambda_2-\lambda_1)^j(\lambda_3-\lambda_1)^{k-j}}\right)\times$$
$$\times B(m_1+p+k+1;n+1).$$

Исследуем асимптотику поведения интеграла $J_1^0(z)$ при $n\to\infty.$ Выражая бета-функцию Эйлера через гамма-функцию, получим:

$$J_1^0(z)=\sum_{k=0}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{C_{m_2}^{j}C_{m_3}^{k-j}\lambda_1^k}{(\lambda_2-\lambda_1)^j(\lambda_3-\lambda_1)^{k-j}}\right)\times$$
$$\times B(m_1+k+1;n+1)=$$
$$=\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m_1+n+2)}\times$$
$$\times\left[1+\sum_{k=1}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{C_{m_2}^{j}C_{m_3}^{k-j}\lambda_1^k}{(\lambda_2-\lambda_1)^j(\lambda_3-\lambda_1)^{k-j}}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\ldots(n+m_1+k+1)}\Bigg].$$

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{C_{m_2}^{j}C_{m_3}^{k-j}\lambda_1^k}{(\lambda_2-\lambda_1)^j(\lambda_3-\lambda_1)^{k-j}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\ldots(n+m_1+k+1)}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{C_{m_2}^{j}C_{m_3}^{k-j}|\lambda_1|^k}{|\lambda_2-\lambda_1|^j|\lambda_3-\lambda_1|^{k-j}}\right)\left(\frac{|m|}{n+|m|}\right)^k-1=$$

$$=\left(1+\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2-\lambda_1|}\frac{|m|}{n+|m|}\right)^{m_2}\times$$

$$\times\left(1+\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3-\lambda_1|}\frac{|m|}{n+|m|}\right)^{m_3}-1,$$

учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}|m|/\sqrt{n}=0,$ получим, что последнее выражение стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому

$$J_1^0(z)=\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+2)}(1+o(1)).\qquad(1.4)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что при $n\to\infty$

$$J_1^p(z)=\frac{\Gamma(m_1+p+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+p+2)}(1+o(1)),\quad p=1,2,\ldots.\qquad(1.5)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1-u_0J_1^0=0$. При $n\to\infty$ $u_0=\dfrac{J_1^1}{J_1^0}=\dfrac{m_1+1}{n+m_1+2}(1+o(1))$. Следовательно, при достаточно больших n имеем $u_0\in[0,1]$.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{\lambda_1(u-u_0)z}$ в окрестности точки u_0, получим

$$e^{\lambda_1uz}=e^{\lambda_1u_0z}e^{\lambda_1(u-u_0)z}=$$

$$=e^{\lambda_1u_0z}\left\{1+\lambda_1z(u-u_0)+\frac{(\lambda_1z)^2}{2!}(u-u_0)^2+\ldots\right\}=$$

$$=e^{\lambda_1u_0z}+e^{\lambda_1u_0z}\lambda_1z(u-u_0)+\rho_u(z),$$

где при $|z|\le L$ и $u\in[0,1]$

$$|\rho_u(z)|\le$$

$$\le|u-u_0|^2\left\{\frac{(|\lambda_1|L)^2}{2!}+\ldots+\frac{(|\lambda_n|L)^n}{n!}+\ldots\right\}\le$$

$$\le L_1(u-u_0)^2.$$

Учитывая (1.4), (1.5) и выбор u_0, получаем равенство

$$I_1(z)=(-1)^{|m|}\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3}\times$$

$$\times\left[\int_0^1(1-u)^nu^{m_1}\left(1+\frac{\lambda_1u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2}\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{\lambda_1u}{\lambda_3-\lambda_1}\right)^{m_3}e^{\lambda_1u_0z}du+$$

$$+\int_0^1(1-u)^nu^{m_1}\left(1+\frac{\lambda_1u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2}\times$$

$$\left.\times\left(1+\frac{\lambda_1u}{\lambda_3-\lambda_1}\right)^{m_3}\rho_u(z)du\right]=$$

$$=(-1)^{|m|}\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3}\times\left[e^{\lambda_1u_0z}J_1^0+A_\rho(z)\right],\qquad(1.6)$$

где при $|z|\le L$

$$|A_\rho(z)|\le$$

$$\le L_1\int_0^1(1-u)^nu^{m_1}\left(1+\frac{\lambda_1u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2}\times$$

$$\times\left(1+\frac{\lambda_1u}{\lambda_3-\lambda_1}\right)^{m_3}(u-u_0)^2du=$$

$$=L_1(J_1^2-u_0J_1^1).$$

В предыдущем выражении воспользовались представлением

$$(u-u_0)^2=(u^2-uu_0)-(uu_0-u_0^2)$$

и тем, что $J_1^1-u_0J_1^0=0$. Имеем

$$|A_\rho(z)|\le$$

$$\le L_1\left\{\frac{\Gamma(m_1+3)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+4)}-u_0\frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+3)}\right\}.$$

При $n\to\infty$ получаем

$$|A_\rho(z)|\le L_1\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+2)}o(1).$$

Принимая во внимание последнее неравенство, из (1.6) следует

$$I_1(z)=(-1)^{|m|}\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3}\times$$

$$\times e^{\lambda_1u_0z}B(m_1+1;n+1)(1+o(1)).$$

Тогда при $n\to\infty$ и $|z|\le L$ окончательно получаем

$$R_{n,\vec m}^1(z)=(-1)^{|m|}\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3}\times$$

$$\times\frac{m_1!n!z^{n+|m|+1}}{(n+m_1+1)!(n+|m|)!}(1+o(1)).$$

Поскольку в рассматриваемом случае равенство (0.3) имеет вид $Q_{n,\vec m}(z)=(1+o(1))$, то справедливо равенство (1.1). Равенства (1.2) и (1.3) доказываются аналогично. □

2 Следствия и обобщения

Из теоремы 1.1, в качестве частных случаев, можно получить уже известные результаты. Не сложно заметить, что при $k=1$ $(m_1=m,$ $m_2=m_3=0)$ из теоремы 1.1 следует результат Д. Браесса (0.2), а при $k=2$ и $\lambda_3=0,$ $m_3=0$ согласуется с результатами из работ [8], [9]:

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $\vec{m}=(m_1,m_2)$,

$$|m|=m_1+m_2,$$

а дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z;e^{\lambda_j z})$ *являются аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода для системы* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^2$, *где* λ_1,λ_2 *– различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty} m(n)/\sqrt{n}=0$, *то равномерно по всем* $\vec{m}$, *для которых*

$$0\le|m|\le m(n),$$

при $n\to+\infty$

$$e^{\lambda_1 z}-\pi^1_{n,\vec{m}}(z;e^{\lambda_1 z})=$$

$$=(-1)^{|m|}\frac{m_1!n!(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\lambda_1^{n+m_1+1}z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!}\big(1+o(1)\big),$$

$$e^{\lambda_2 z}-\pi^2_{n,\vec{m}}(z;e^{\lambda_2 z})=$$

$$=(-1)^{|m|}\frac{m_2!n!(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}\lambda_2^{n+m_2+1}z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!}\big(1+o(1)\big),$$

где оценка $o(1)$ *равномерна по всем* $|z|\le L$.

При $\lambda_j=j$, $j=1,2,3$, теорема 1.1 обобщает результаты работы [10].

***Следствие* 2.2.** *Пусть* n,m_1,m_2,m_3 *– произвольные целые неотрицательные числа, а* $\pi^j_{n,\vec{m}}(z)$, $j=1,2,3$ *– аппроксимации Эрмита – Паде для* $\vec{f}=\{e^{jz}\}_{j=1}^3$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty}|m|/\sqrt{n}=0$, *то для любого комплексного числа* z *равномерно по всем* $\vec{m}$, *для которых* $0\le|m|\le m(n)$, *при* $n\to+\infty$

$$e^{z}-\pi^1_{n,\vec{m}}(z)=(-1)^{|m|}\frac{2^{m_3}m_1!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!}(1+o(1)),$$

$$e^{2z}-\pi^2_{n,\vec{m}}(z)=$$

$$=(-1)^{|m|}\frac{(-1)^{m_1}2^{n+m_2+1}m_2!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!}(1+o(1)),$$

$$e^{3z}-\pi^3_{n,\vec{m}}(z)=$$

$$=(-1)^{m_3}\frac{2^{m_1}3^{n+m_3+1}m_3!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!}(1+o(1)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermite*, *C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

2. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

3. *Бейкер*, *Дж. мл.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

4. *Perron*, *O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig: Teubner, 1929. – 524 p.

5. *Braess*, *D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

6. *Аптекарев*, *А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

7. *Type* II *Hermite – Padé approximation to the exponential function* / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W.Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207, № 2. – P. 227–244.

8. *Старовойтов*, *А.П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1, ч. 2. – С. 88–91.

9. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

10. *Кечко*, *Е.П.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент / Е.П. Кечко, М.В. Сидорцов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (144). – С. 158–162.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*проект* Ф18М-025).

Поступила в редакцию 13.01.20.